Grundlagen der technischen Informatik **Übungsblatt 4**

Aufgabe 16

a) Zeigen Sie, daß $f_d = x_1 x_2 x_3$ die duale Funktion zu $f = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ ist.

b) Zeichnen Sie die Schaltung, die die duale Funktion h_d zu $h = x_1 x_2 \vee x_3$ realisiert.

Aufgabe 17

a) Beweisen Sie, daß es $\sqrt{2^{2^n}} = 2^{2^{n-1}}$ selbstduale Funktionen mit *n* Variablen gibt.

b) Zeigen Sie mit einer Tabelle, wieviele selbstduale Funktionen es gibt, die wesentlich von drei Variablen abhängen.

b) Beweisen Sie, daß $f = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 (x_2 \vee x_3)$ eine selbstduale Funktion ist.

Aufgabe 18

a) Vergleichen Sie die Definition einer monotonen Funktion aus der Analysis mit der Definition einer monotonen Booleschen Funktion.

b) Prüfen Sie, ob $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$ eine monotone Funktion ist.

Aufgabe 19

a) Geben Sie eine beliebige lineare Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ von 6 Variablen an.
b) Wieviele lineare Funktionen von *n* Variablen gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 20

Nennen Sie je drei zweistellige Funktionen, die

a) der Klasse $K_0\,(f(0,0) = 0)$ angehören,
b) der Klasse $K_1\,(f(1,1) = 1)$ angehören.

Lösungen

Aufgabe 16

a) Nach Definition gilt $f \rightarrow f^* = \bar{f}(\bar{x}) = f_d$, demnach $f^* = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3} = \underline{\underline{x_1 x_2 x_3}}$

Also ist f_d die duale Funktion zu f .

b) $f_d = \overline{(\bar{x}_1 \bar{x}_2) \vee \bar{x}_3} = \underline{\underline{(x_1 \vee x_2) x_3}}$ Die Schaltung entfällt.

Aufgabe 17

a) es ist bekannt:

	$\overbrace{x_1, \ldots, x_n}^{n}$	$\overbrace{Funktionen}^{2^{2^n}}$
$2^n \{$*Kombinationen*		

daraus folgt:

	x_1	x_2	x_3	$\overbrace{selbstduale\ Funktionen}^{2^{2^{n-1}}}$
a	0	0	0	
b	0	0	1	
c	0	1	0	
d	0	1	1	
$\bar{d}$	1	0	0	*entfällt*
$\bar{c}$	1	0	1	*entfällt*
$\bar{b}$	1	1	0	*entfällt*
$\bar{a}$	1	1	1	*entfällt*

Man betrachtet nur die obere Hälfte der Kombinationen, da die untere Hälfte aus der Negation der ersten in umgekehrter Reihenfolge gebildet wird. Dabei ist zu beachten: $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$

b)

x_1	x_2	x_3	f_0	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	f_{15}
			●			●		●					●		●			●
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

$n = 3 \rightarrow 2^{n-1} = 4 \rightarrow 2^{2^{n-1}} = 16$ Die markierten Funktionen sind nicht wesentlich von den drei Variablen abhängig. Erkennbar ist dies an dem durchgängigen Muster. 10 Funktionen sind wesentlich abhängig von 3 Variablen und zugleich selbstdual.

c) $f = xyz \vee \bar{x}(y \vee z)$ Wenn f selbstdual ist, dann gilt $f = f_d = \bar{f}(\bar{x})$

$$\begin{aligned} f^* &= \overline{(\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \vee (x(\bar{y} \vee \bar{z}))} = \overline{(\bar{x}\bar{y}\bar{z})} \wedge \overline{(x(\bar{y} \vee \bar{z}))} \\ &= (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee yz) = xyz \vee \bar{x}y \vee yz \vee \bar{x}z \vee yz \\ &= xyz \vee \bar{x}(y \vee z) \vee yz = xyz \vee \bar{x}(y \vee z) \vee (x \vee \bar{x})yz \\ &= xyz \vee \bar{x}(y \vee z) \vee xyz \vee \bar{x}yz = xyz \vee \bar{x}(y \vee z \vee yz) \\ &= \underline{\underline{xyz \vee \bar{x}(y \vee z) = f}} \end{aligned}$$

Aufgabe 19

a) zum Beispiel: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_5 \oplus x_6$

b) Eine lineare Funktion ist wie folgt definiert: $f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus ... \oplus a_n x_n$
Dies heißt, es gibt so viele lineare Funktionen von n Variablen, wie es Kombinationen von $a_0, ..., a_n$ gibt. Bei n Variablen existieren $n+1$ Koeffizienten a. Aus diesen lassen sich wiederum 2^{n+1} Kombinationen aus $\{0;1\}$ bilden. Folglich gibt es 2^{n+1} lineare Funktionen von n Variablen.

Aufgabe 20

a) $K_0(f(0,0) = 0) \Rightarrow$ Konjunktion, Antivalenz, Disjunktion

b) $K_1(f(1,1) = 1) \Rightarrow$ Konjunktion, Disjunktion, Implikation