

**Aufgabe 18**

- a) Vergleichen Sie die Definition einer monotonen Funktion aus der Analysis mit der Definition einer monotonen Booleschen Funktion.
- b) Prüfen Sie, ob  $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4$  eine monotone Funktion ist.

**Aufgabe 21**

Im Informationsblatt 1 (vom 12.10.1999) sind in Tabelle 2 alle 16 zweistelligen Booleschen Funktionen aufgelistet.

- a) Geben Sie für jede Funktion  $f_0 - f_7$  an, zu welchen der Klassen  $K_0, K_1, K_{\text{linear}}, K_{\text{selbstdual}}, K_{\text{monoton}}$  sie gehört.
- b) Eine Boolesche Funktion heißt Sheffer-Funktion, wenn sie eine einelementige Basis ist. Wie kann man diese Funktionen aus den Ergebnissen von a) erkennen?

**Aufgabe 22**

Bestimmen Sie alle monotonen Funktionen, die nicht der Klasse  $K_1$  angehören.

**Aufgabe 23****Aufgabe 24**

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des Jablonski-Theorems, daß die Menge  $\{\rightarrow, 0\}$  eine Basis ist.
- b) Stellen Sie die Funktionen AND, OR und die Negation mit den Funktionen dieser Basis dar!

Lösungen
**Aufgabe 18**

- a) Der wesentliche Unterschied in den Definitionen ist, daß eine Funktion der Analysis auch monoton fallen kann, was in der Booleschen Algebra ausgeschlossen ist. Läßt man nun die monoton fallenden Funktionen außer Betracht, so gleichen sich die Definitionen fast. Ein kleiner Unterschied bleibt. Bei einer Booleschen Funktion können die zu vergleichenden  $x$ -Werte gleich sein  $x_2 \geq x_1$ , wogegen in der Analysis  $x_2 > x_1$ .
- b) Aus Platzgründen stelle ich die Wertetabelle quer da.

$f$	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
$x_4$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$x_3$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$x_2$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$x_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Dies ist keine monotone Funktion. Beweis anhand folgender Beispiele:

- $f(0000) = 0$  und  $f(1111) = 0$  Zwischen den beiden gibt es aber Funktionswerte, die den Wert 1 annehmen. Um monoton zu sein, müßte auf jeden Fall  $f(1111) = 1$  sein, was aber nicht der Fall ist.
- $f(0001) \leq f(0011) \Rightarrow false$
- $f(0010) \leq f(0110) \Rightarrow false$

Das müßte an Gegenbeispielen ausreichen.

**Aufgabe 21**

$x_1$	$x_2$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
a) $K_0$	?	•		•		•		•	
$K_1$	?								
$K_{sd}$	?				•		•		
$K_{mon}$	?	•							
$K_{lin}$	?	•			•		•	•	

$K_0$  = Klasse der 0 erhaltenden Funktionen;  $K_1$  = Klasse der 1 erhaltenden Funktionen

$K_{sd}$  = Klasse der selbstdualen Funktionen;  $K_{mon}$  = Klasse der monotonen Funktionen

$K_{lin}$  = Klasse der linearen Funktionen

- b) Eine Sheffer-Funktion läßt sich daran erkennen, daß Sie zu keiner der in a) genannten fünf Klassen gehört. In dieser Auswahl sind  $f_1$  und  $f_7$  Sheffer-Funktionen. Es handelt sich dabei um NOR und NAND. Beides sind einelementige Basen (minimal), wie es schon mehrfach in Übungen und Vorlesungen bewiesen wurde.

### Aufgabe 22

Ich nenne diese Menge  $F_{m_1}$ . Sie ist wie folgt definiert:  $F_{m_1} = \{f_n \notin K_1; f_n \in K_{mon}\} = \{f_0\}$

Diese Menge besitzt nur eine Funktion. Die jeweils erste Funktion ( $f_0$ ), deren Werte alle 0 sind. Das muß so sein, da  $f$  nicht  $K_1$  angehören darf und folglich der letzte aller bei Monotonie zu vergleichenden Tupel=0 ist. Somit müssen alle vorhergehenden Funktionswerte (Bits)  $\leq 0$  sein. Es ist immer die Konstante 0, die die geforderten Bedingungen erfüllt.

### Aufgabe 24

- a) Das genannte Theorem besagt, daß eine Menge Boolescher Funktionen genau dann vollständig ist, wenn es Funktionen in dieser Menge gibt, so daß sie nicht  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_{sd}$ ,  $K_{mon}$  und  $K_{lin}$  angehören. Ist dies erfüllt, so kann man max. 4 Funktionen als Teilmenge entnehmen, die eine Basis sind.

$\{\rightarrow; 0\}$  sagt aus, daß die Implikation und die Konstante 0 diese Menge bilden. Die Implikation ist nicht selbstdual, nicht monoton, nicht linear und gehört nicht der Klasse 0 an (siehe letzte Vorlesung). Die Konstante 0 gehört nicht der Klasse 1 an (siehe Aufgabe 21). Damit sind alle Bedingungen erfüllt und es ist gezeigt, daß  $\{\rightarrow; 0\}$  eine Basis ist.

- b) Negation:  $\bar{x} = \underline{\underline{x \rightarrow 0}}$

Disjunktion:  $x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \rightarrow x_2 = \underline{\underline{(x_1 \rightarrow 0) \rightarrow x_2}}$

Konjunktion:  $x_1 \wedge x_2 = \underline{\underline{x_1 \wedge x_2}} = \underline{\underline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2}} = \underline{\underline{x_1 \rightarrow \bar{x}_2}} = \underline{\underline{(x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow 0))}}$   
 $x_1 \wedge x_2 = \underline{\underline{(x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow 0)) \rightarrow 0}}$